УДК 512(09)

ІСТОРІЯ ДІОФАНТОВИХ РІВНЯНЬ

Коновалова Вікторія Валеріївна

Науковий керівник: доктор іст. наук, професор Ріжняк Ренат Ярославович

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна

Мета роботи обґрунтувати основні теоретичні засади розвитку діофантових рівнянь, розкрити прикладні та практичні аспекти застосування діофантових рівнянь.

Наведений матеріал дає змогу дізнатися про життя та внесок в математику відомого вченого Діофанта Олександрійського, зокрема про його внесок в теорію розв'язку найпростішого невизначеного рівняння. Діофантові рівняння представляють великий науковий інтерес у теорії чисел і безпосередньо зв'язані з рішенням задач, що виникають у реальному житті.

Ключові слова: рівняння, діофантові рівняння, рівняння першого степеня, цілі числа.

HISTORY OF DIOPHANTIC EQUATIONS

Konowalowa Wiktoria

Scientific supervisor: doctor of historical sciences, Professor Rizhniak R.Ya.

The Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytsky, Ukraine

The purpose of the work is to substantiate the basic theoretical principles of Diophantine equations, to disclose the applied and practical aspects of the use of Diophantine equations.

The given material gives an opportunity to learn about the life and contribution to the mathematics of the famous scientist Diophantus of Alexandria, in particular on his contribution to the theory of the solution of the simplest uncertain equation. Diophantine equations are of great scientific interest in the theory of numbers and are directly related to the solution of problems that arise in real life.

Keywords: equations, Diophantine equations, first order equations, integers.

Постановка проблеми цього математико-історичного дослідження пов'язана з використанням матеріалу вчителями ЗНЗ та викладачами ВНЗ в якості історичної довідки щодо виникнення та розвитку аналізу найпростіших невизначених рівнянь або діофантових рівнянь. Наведений матеріал дає змогу дізнатися про життя та внесок в математику відомого вченого Діофанта

Олександрійського, зокрема про його внесок в теорію розв'язку найпростішого невизначеного рівняння. Моя робота заснована на аналізі доступних мені джерел: навчальні ресурси мережі Internet та наукова література з математики.

Аналіз дослідження і публікацій. Після праць нідерландського математика Анрі Жірара (1595–1632), а також француза Рене Декарта (1596–1650) та англійця Ісаака Ньютона (1643–1727) формула коренів квадратного рівняння набула сучасного вигляду. Юрій Матіясевич в 1970 році показав алгоритмічну нерозв'язуваність 10 проблеми Гільберта. П'єр Ферма продовжив дослідження Діофанта. Питання історії розвитку діофантових рівнянь аналізували в своїх працях українські вчені Гнезділова Т., Спринжук В.Г., Юшкевич А.П., Рибніков К.А., Вилейтнер Г. Крім того, наша робота заснована на аналізі доступних джерел: навчальні ресурси мережі Internet та наукова література з математики, а також на методології історичного дослідження [7].

Мета статті – обґрунтувати основні теоретичні засади розвитку діофантових рівнянь, розкрити прикладні та практичні аспекти застосування діофантових рівнянь.

Із часів Евкліда й Архімеда змінюються зміст і форма античної математики. Процес формування нових теорій сповільнюється, а згодом припиняється й зовсім. Але він був тривалим і позначився не відразу. Найвиразніше він виявився в творчості останнього видатного математика античного світу – Діофанта Олександрійського [5].

Історія майже нічого не зберегла про його життя. Тільки опосередковано вдалося встановити, коли приблизно він жив. А в популярному в X–XIV ст. збірнику віршованих арифметичних задач «Грецька онтологія» вміщено задачу під назвою «Епітафія Діофанта».

Задача зводиться до рівняння першого степеня, розв'язавши яке дізнаємося, що Діофант жив 84 роки. Ось і всі відомості про його життя.

Ще більшою загадкою, ніж біографія Діофанта, стала для науки його «Арифметика», з 13 книг якої збереглося лише шість. У них подано 189 задач з розв’язаннями і поясненнями. За формою «Арифметика» просто збірник задач, але за змістом – унікальне явище, справжнє чудо історії математики [5].

Уже вступ до книги свідчить про великий крок уперед, який зробив Діофант порівняно з математиками класичної давнини. Для них одиниця ще була не подільна, її частини, тобто дроби виду $\frac{m}{n}$, були тільки відношеннями цілих чисел, а не числами, $\sqrt{2}$ – відношенням діагоналі квадрата до сторони. Про від’ємні числа ще й не йшлося. Діофант шукає розв’язки задач у додатних раціональних числах, а в проміжних обчисленнях користується і від’ємними числами. Він перший вводить буквену символіку для перших шести степенів невідомого і вільного члена, знак від’ємного показника степеня та рівності. Діофант формулює правило додавання до обох частин рівняння однакових членів, зведення подібних. Назви степенів змінної ще мають геометричну інтерпретацію (квадрат, куб), які збереглися й до наших днів, але вчений розглядає квадрато-квадрати і квадрато-куби як числа і підсумовує квадрат з кубом і т.д. Отже, алгебру Діофант будує вже не на геометрії, як це робив Евклід, а на арифметиці, при цьому зі своєю мовою і символікою. Природно, що такі ідеї мали бути результатом певного розвитку математичної думки. Проте ми не бачимо в творця «Арифметики» попередників і не зрозуміло, як здійснювалася еволюція його поглядів, що була, здається, під силу лише поколінням учених. Це найбільша загадка математики [1, 74–78].

Найпростіші діофантові рівняння розв’язували вже шумеро-вавілонські математики, піфагорійці й Евклід. Діофант розробляє, по суті, цілу теорію таких рівнянь. З неї в сучасній науці сформувалася окрема галузь математики – діофантовий аналіз, або діофантова геометрія [6].

Ідеям і задачам Діофанта судилася довга й щаслива доля. Він передав їх математикам Середньої Азії, Близького Сходу та Індії. У XVII ст. їх висвітлив по-новому П'єр Ферма (1601–1665). Відтоді проблеми, які заповів нащадкам Діофант, привертають увагу найвидатніших учених.

Деякі з них розв'язані, інші – не розкриті й досі. Дві проблеми Діофанта особливо пам'ятними сторінками вписані в історію математики [1, 252–267]

Діофантові рівняння представляють великий науковий інтерес у теорії чисел і безпосередньо зв'язані з розв’язуванням задач, що виникають у реальному житті. Зокрема, відомою задачею теорії діофантових рівнянь донедавна була проблема Ферма.

П’єр Ферма (1601–1665), вивчаючи «Арифметику» Діофанта, зробив на полях цієї книги знамениту позначку: «Я знайшов воістину дивний доказ того, що рівняння $x^n + y^n = z^n$ при n > 2, не має розв’язків у цілих числах, однак поля цієї книги занадто малі, щоб тут його умістити». Це одне із самих марних математичних тверджень, твердження одержало назву «Великої теореми Ферма» і викликало ажіотаж серед математиків і аматорів (особливо після призначення в 1908 році за його доведення премії в 100 000 німецьких марок) [3]. Спроби довести цю теорему породили цілі розділи сучасної алгебри, алгебраїчної теорії чисел, теорії функцій комплексної змінної й алгебраїчної геометрії, практична користь від який уже не підлягає ніякому сумніву. Сама теорема була доведена в 1995 році; П’єр Ферма переоцінив свої можливості на полях «Арифметики», тому що він фізично не міг придумати подібного доведення, яке вимагало колосальної сукупності математичних знань. Елементарного доведення великої теореми Ферма поки ніхто з жителів нашої планети знайти не зміг, хоча над його пошуком билися кращі розуми останніх трьох сторіч [2].

У 1900 р. видатний німецький математик Д. Гільберт (1862–1943) на другому Міжнародному математичному конгресі виголосив доповідь «Математичні проблеми», в якій поставив перед вченими 23 задачі з різних розділів математики, розв'язання яких мало важливе значення для подальшого розвитку математики [6].

Десятою проблемою була «задача про розв’язність діофантового рівняння», яка сформульована так: «Нехай дано діофантове рівняння з довільними невідомими і цілими раціональними числовими коефіцієнтами.

Назвіть спосіб, за допомогою якого можна після скінченого числа операцій встановити, чи розв'язне це рівняння в цілих раціональних числах».

Найпростіші діофантові рівняння 1-го степеня з двома невідомими $ax+by=c$ $(a,b,c\in Z)$ розв'язали піфагорійці. До діофантового рівняння привело розв'язання знаменитої задачі Архімеда про биків. Індійські математики розв'язали рівняння $ax^2+b=y^2$ і його окремий випадок $ax^2+1=y^2$. Ж.-Л. Лагранж (1736–I813) дослідив розв'язки рівняння $ax^2+bxy+cy^2+x+y+f=0$.

Учені дістали багато інших важливих результатів. Та все це було лише початком у дослідженні надзвичайно складної загальної проблеми про розв'язність загального діофантового рівняння *n*-го степеня від *m* змінних [6].

Відповіді довелося чекати 70 років. У 1970 р. на Міжнародному математичному конгресі в Ніцці двадцятирічний аспірант Юрій Володимирович Матіясевич сколихнув математичний світ справжньою сенсацією століття – доповів про розв'язання 10-ї проблеми Гільберта. Він довів, що ніякого загального методу для розв'язання діофантового рівняння не існує [1, 82]. Доведення Матіясевича дало ще побічні результати, яких він не шукав і які буквально приголомшили математиків своєю несподіваністю. Виявилося, що існує цілочисловий многочлен (щоправда, досить високого степеня і від великого числа змінних) – такий, що при всіх цілих значеннях змінних, коли він додатний, він представляє тільки прості числа. Виявляється, що універсальний генератор простих чисел, за яким полювали математики від Ейлера до наших днів, не казкова жар-птиця. Існує й такий многочлен, усі цілі значення якого (при цілих значеннях змінних) подають послідовність: $2^2;3^{3^3};4^{4^{4^4}}$, і тільки такі числа. Результати Матіясевича проливають світло на існування глибоких ще не розгаданих залежностей на множині цілих чисел [6].

Висновки. Історія діофантових рівнянь налічує вже більше 17-ти століть. Але і сьогодні наукові проблеми, пов’язані з використанням діофантових рівнянь на практиці залишають небайдужими математиків сучасності. До діофантових рівнянь найчастіше зводяться задачі, за змістом яких невідомі значення величин можуть бути тільки цілими числами. Важливість даної теми ще й у тому, що діофантові рівняння дають велику можливість для розвитку логічного мислення учнів, бо загальних способів їх розв'язування немає, до кожного типу рівнянь треба підходити творчо, використовуючи пошукові методи, які, в першу чергу, направлені на формування учня як особистості, здатної до самостійної, творчої діяльності. У подальшому можна досліджувати дану тему та вводити цю тему в шкільний курс більш детальніше та розгорнутіше.

Список літератури.

1. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины 19 столетия. Москва, Наука, 1969, с. 74-78, 82, 252–267.
2. Спринжук В.Г. Классические диофантовы уравнения от двух неизвесных. Москва, 1982, с. 34, 212.
3. Рыбников К.А. История математиков. Київ, 1974, с. 149–157.
4. Юшкевич А.П. Арифметика и книга о многоугольных числах. Москва, Наука, 1974, с. 7–15
5. Вільна енциклопедія «Вікіпедія» [Електронний ресурс]. - Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Діофантові_рівняння
6. Діофантові рівняння [Електронний ресурс]. - Режим доступу: http://eprints.zu.edu.ua/12193/1/Klimchuk.pdf
7. Ріжняк Р.Я. Розвиток інформатики та інформаційних технологій у вищих навчальних закладах України у другій половині XX – на початку XXI століття. Кіровоград, Видавництво «Код», 2014, 436 с.